Wzór Eulera

$$\boxed{e^{i\pi}+1=0}$$

Wyprowadzenie wzoru

Funkcja e^z ma rozwinięcie w szereg Taylora postaci (z jest liczbą zespoloną)

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

Jeśli podstawimy $z = ix$, gdzie i to jednostka urojona czyli taka, że $i^2=-1$ otrzymamy:

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots$$

Rozwijamy kolejne potęgi liczby ix:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Możemy uporządkować wyrazy według części rzeczywistej i urojonej.

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right)$$

Część rzeczywista to rozwinięcie w szereg Taylora funkcji $\cos x$, a część urojona to rozwinięcie funkcji $\sin x$

Zatem $$\boxed{e^{ix} = \cos x + i\sin x}$$

W szczególnym przypadku dla $x=\pi$ otrzymamy

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi$$

ale $\cos\pi = -1$ i $\sin\pi = 0$

więc $\boxed{e^{i\pi}=-1}$ albo inaczej $\boxed{e^{i\pi}+1=0}$